

DOI: 10.16285/j.rsm.2020.1067

饱和土中周期排列管桩对平面 SV 波 隔振的解析求解

巴振宁^{1,2,3}, 刘世朋³, 吴孟桃³, 梁建文^{1,2,3}

(1. 天津大学 滨海土木工程结构与安全教育部重点实验室, 天津 300350; 2. 天津大学 中国地震局地震工程综合模拟与城乡抗震韧性重点实验室, 天津 300350; 3. 天津大学 土木工程系, 天津 300350)

摘 要: 基于 Biot 流体饱和多孔介质理论, 采用波函数展开法并结合 Graf 加法定理, 解析求解了饱和土中周期排列管桩对平面 SV 波的隔振问题。该方法利用饱和土中不同周期单元的散射波场在频域内仅相位不同的特性, 将饱和土中无限周期排列管桩对 SV 波的散射问题转换为仅针对一个周期单元的求解, 因而在精确求解的同时显著降低了计算量, 并在一定程度上弥补了现有方法在管桩数较多时难以求解的局限。在验证方法正确性的基础上, 重点讨论了桩体个数、饱和土参数、管壁厚度、桩排数和排列方式等因素对隔振能力的影响。研究表明: 周期排列管桩在饱和土中的隔振能力整体上优于弹性土, 且在渗透性越差的饱和土中隔振能力越强; 管桩的管壁厚度不宜过薄, 内外径之比取为 0.6 左右, 周期排列管桩在大多数频率下隔振能力稳定; 增加桩排数能够显著提高隔振能力, 在无量纲频率为 0~0.6 的较低频段, 隔振能力提高幅度为 20%左右, 在无量纲频率为 0.6~3.0 的中高频段, 隔振能力提高幅度可达 60%, 采用三排管桩屏障可屏蔽饱和土中大多数频率下的入射 SV 波; 管桩矩形排列的隔振效果在无量纲频率为 0~1.0 的较低频段优于梅花形排列, 其他频段两种排列方式均具有良好的屏蔽 SV 波效果。

关 键 词: 饱和土体; 管桩隔振; 周期排列; 波函数展开法; 平面 SV 波

中图分类号: TU435

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2021) 03-0627-11

Analytical solution for isolation effect of plane SV waves by pipe piles with periodic arrangement in saturated soil

BA Zhen-ning^{1,2,3}, LIU Shi-peng³, WU Meng-tao³, LIANG Jian-wen^{1,2,3}

(1. Key Laboratory of Coast Civil Structure Safety, Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300350, China; 2. Laboratory of Earthquake Engineering Simulation and Seismic Resilience of China Earthquake Administration, Tianjin University, Tianjin 300350, China; 3. Department of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

Abstract: Based on Biot's porous media theory of saturated fluid, the wave function expansion method and Graf addition theorem are used to solve the vibration isolation problem of plane SV wave by periodically arranged pipe piles in saturated soil. In this method, the scattering problem of SV wave by infinite periodic piles in saturated soil is transformed into solving only one periodic element by using the characteristic that the scattering wave field of different periodic elements in saturated soil is only different in frequency domain. Therefore, it can solve the problem of SV wave scattering by infinitely periodic pipe piles in saturated soil into solving only one periodic element limit. On the basis of verifying the correctness of the method, the influence of the number of piles, the parameters of saturated soil, the thickness of pipe wall, the number of piles and the arrangement mode on the vibration isolation capacity are discussed. The results show that: (1) the vibration isolation capacity of periodically arranged pipe piles in saturated soil is better than that in elastic soil, and the vibration isolation ability is stronger in saturated soil with poor permeability; (2) the thickness of pipe wall should not be too thin, and when the ratio of inner diameter to outer diameter is about 0.6, the vibration isolation capacity of periodically arranged piles can be stable at most frequencies; (3) increasing the number of piles can significantly improve the vibration isolation capacity, which can be increased by about 20% in the low frequency range of dimensionless frequency 0-0.6, and 60% in the medium and high frequency range of dimensionless frequency 0.6-3.0; (4) the vibration isolation effect of rectangular

收稿日期: 2020-07-24

修回日期: 2020-12-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.51778413, No.51578373); 天津市研究生科研创新项目 (No.2019YJSB176)。

This work was supported by the Natural Science Foundation of China(51778413, 51578373) and the Innovation Foundation for Postgraduate of Tianjin (2019YJSB176).

第一作者简介: 巴振宁, 男, 1980 年生, 博士, 教授, 主要从事地震工程与工程波动方面的研究。E-mail: bazhenning_001@163.com

arrangement of piles is better than that of plum shaped arrangement in the low frequency range of dimensionless frequency 0–1.0, and the other two arrangements have good shielding effect.

Keywords: saturated soil; vibration isolation of pipe piles; periodic arrangement; wave function expansion method; plane SV waves

1 引言

目前作为国际上“七大公害”之一的环境振动问题日益突出^[1],而设立屏障以截断、绕射及散射入射波可有效阻隔振动传播。以空沟或填充沟为代表的连续屏障隔振能力显著^[2],但深度要求较高,尤其不适用于以软土与高地下水位地基为代表的饱和土地地区;而以排桩和排孔为代表的非连续屏障深度限制较小,布局灵活且效果显著,具有广阔的发展空间。

针对排桩隔振问题的研究,大量国内外学者采用了单相介质模型(即弹性土模型):Woods等^[3]首次运用全息干涉法试验研究了圆柱孔屏障的隔振问题,从而提出单排桩设计准则;Avilés等^[4-5]首次采用波函数展开法,解析求解了一排实心桩的隔振问题;Kattis等^[6-7]采用边界元法对排桩和排孔的隔振效果进行了数值计算,针对排孔、明沟、排桩和填充沟的隔振能力进行了对比;Gao等^[8]利用半解析边界元法对三维多排桩进行数值计算,研究了对瑞雷波的隔振效果;徐平等^[9]则针对单排空心管桩的隔振问题,采用波函数展开法进行了解析求解;刘中宪等^[10]运用一种间接边界积分方程法进行了宽频带数值计算,研究了平面弹性波入射下的排桩隔振问题;刘维宁等^[11]采用原理性试验的方法,验证了周期性隔振排桩的衰减域特性。

相比于单相介质模型,两相介质模型所模拟的饱和土体更符合软土和高地下水位地基土的实际情况,因此已有不少学者针对饱和土中的排桩隔振问题开展工作。Cai等^[12]首次运用波函数展开法并结合 Biot 理论,解析求解了单排实心桩在饱和土中的隔振问题;时刚等^[13]基于饱和介质的边界元法进行数值计算,研究了单排桩在饱和土中远场的被动隔振能力;徐平等^[14]采用同文献[12]类似的方法,解析求解了饱和土中单排空心管桩对平面 P_1 波的隔振效应;李昌俊等^[15]运用 Biot 理论与间接边界积分方程法进行宽频数值计算,研究了饱和土中空心管桩屏障的隔振问题;孙连勇等^[16]采用试验研究和数值分析的方法,研究了饱和土中单排孔的近场隔振能力;Meng等^[17]采用有限元法对饱和土中的多排管桩进行了数值计算,对周期管桩体系进行了频率响应分析。

以上研究方法主要包括试验研究、数值计算和

理论分析,其中以波动理论为基础的理论分析可作为试验研究和数值计算的精度验证,求解精确且能够分析散射问题的本质。而当前的理论分析均在涉及桩体个数较多时具有局限性,桩数越多则需要满足的边界条件越多,难以在桩数较多时进行有效计算,因此,目前已有研究在算例分析时多限于桩体个数较少(每排 9 个以内)的情况,而在桩体个数较多时求解困难。

本文提出一种考虑饱和土体两相介质特性,适用于管桩呈周期规律大量排列时的一种解析方法,不仅求解结果精确还能有效提高计算效率,并在理论分析方面弥补了现有方法在涉及管桩数较多时求解困难的局限。具体方法为:以 Biot 流体饱和多孔介质理论为基础,采用波函数展开法和作者在前期研究中^[18-19]推导的任意坐标系间变换的 Graf 加法定理,利用周期排列管桩的周期特性,将饱和土中无限周期排列管桩对 SV 波的散射问题转换为仅针对一个周期单元的求解。文中在正确性验证的基础上,重点讨论了桩体个数、饱和土参数、管壁厚度、桩排数和排列方式等因素对隔振能力的影响,以期对饱和土中管桩隔振的研究与工程应用提供一定的理论依据。

2 模型与求解方法

饱和土体中周期排列管桩的模型如图 1 所示,管桩位于饱和土体中并呈周期规律排列,特别说明的是,图 1 仅以梅花形周期排列为例,而本文的方法适用于呈周期规律任意排列的管桩形式,只需改变模型中周期单元的排列方式即可实现。

周期单元按模型图所示标号,并定义第“0”周期列为“基础单元”,以“基础单元”的第 1 排管桩圆心为坐标原点,建立整体直角坐标系 (x, y) ,其对应的极坐标系为 (r, θ) ;同时,以任意周期单元中的任意管桩圆心为坐标原点,建立局部直角坐标系 $(x_{c,j}, y_{c,j})$,其对应的极坐标系为 $(r_{c,j}, \theta_{c,j})$,如图 1 所示。

桩体均为空心管桩,管桩外径为 a ,内径为 a_2 ,设管桩大小和材质相均同且拉梅常数为 λ_p 和 μ_p ,质量密度为 ρ_p 。由管桩组成的周期单元在 x 轴方向上周期分布且间距为 s ,周期单元内在 y 轴方向的排间距为 h 。平面 SV 波以与 x 轴为 θ_{sv} 的夹角入射。

如图 1 所示,在平面 SV 波入射时,饱和土体

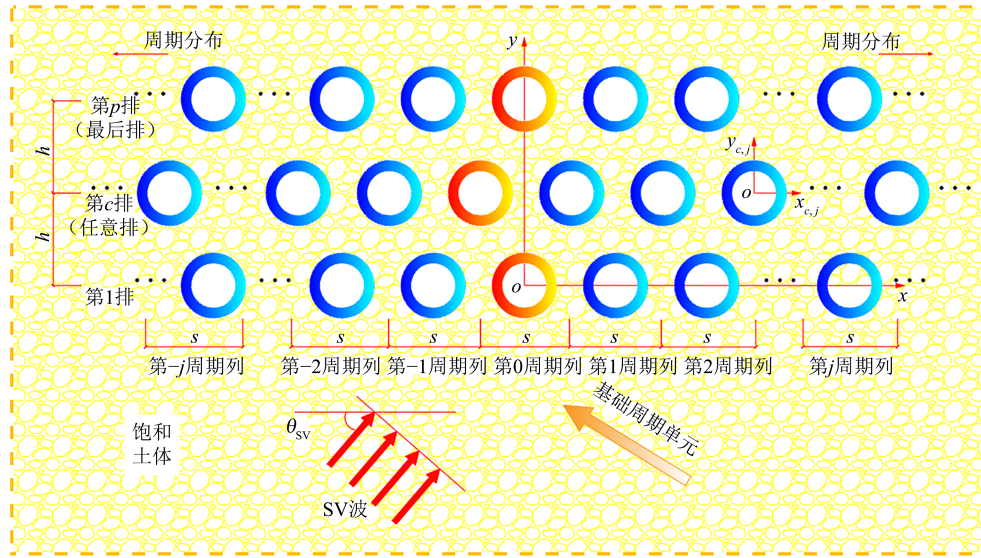


图1 周期排列管桩对平面 SV 波的散射分析模型

Fig.1 Scattering analysis model of plane SV wave by pipe piles with periodic arrangement

中的每个周期单元的相对位置均相同，其散射波场仅因入射波角度 θ_{SV} 的存在而在时域内存在时间差，转换到频域内即相位差。因此仅需以设定的“基础单元”为研究对象，将饱和土中无限周期排列管桩对 SV 波的散射问题转换为仅针对“基础单元”的求解，其他周期单元的散射波场可通过对“基础单元”的散射波场偏移一定的相位确定；由此可得饱和土中的总波场，然后结合管桩内的散射波场与边界条件，通过求解无穷线性方程组即可得所有周期单元桩体的散射波场。

2.1 Biot 流体饱和多孔介质波动理论

根据 Biot 理论^[20]，饱和土中的 4 个基本控制方程分别为

(1) 土体本构方程：

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{i,i} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \alpha p_f \quad (1)$$

式中： σ_{ij} 为土体应力； δ_{ij} 为克罗内克函数； ε_{ij} 为土体应变； $u_{i,i}$ 为固相土骨架位移； α 为孔隙水的压缩性常数； p_f 为饱和土中的孔隙水压力； λ 与 μ 分别为饱和土中土骨架的两个拉梅常数。

(2) 渗流连续方程：

$$-p_f = Mw_{i,i} + \alpha Mu_{i,i} \quad (2)$$

式中： M 为饱和土中土颗粒的压缩性常数； $w_{i,i}$ 为孔隙流体相对于土骨架的位移。

(3) 土体运动方程：

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (3)$$

式中： $\sigma_{ij,j}$ 为土体应力的导数； $\rho = (1-f)\rho_s + f\rho_f$ ，

为饱和土的总密度， f 为孔隙率， ρ_s 和 ρ_f 分别为其中土骨架和水的密度。

(4) 流体运动方程：

$$-\rho_{f,i} \ddot{w}_i = \rho_f \ddot{u}_i + m' \ddot{w}_i + b \dot{w}_i \quad (4)$$

式中： b 为反映黏性耦合的系数， $b = \eta / k$ ， η 为流体黏滞性， k 为土体渗透系数； $m' = \rho_f / f$ ，为饱和参数。

用土骨架位移 u 和孔隙水相对位移 w 表示控制方程可得

$$\left. \begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda_c + \mu) \text{grad}(\text{div } u) + \alpha M \cdot \text{grad}(\text{div } w) &= \\ \rho \ddot{u} + \rho_f \ddot{w} \\ \alpha M \cdot \text{grad}(\text{div } u) + M \cdot \text{grad}(\text{div } w) &= \rho_f \ddot{u} + m' \ddot{w} + b \dot{w} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中： $\lambda_c = \lambda + \alpha^2 M$ 。

根据 Helmholtz 矢量分解原理，采用标量势和矢量势进行波场分解：

$$\left. \begin{aligned} u &= \nabla \phi + \nabla \times \psi \\ w &= \nabla \phi + \nabla \times \chi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中： ϕ 和 ψ 均为土骨架部分的势函数； ϕ 和 χ 为流体部分（孔隙水）的势函数。

将式 (6) 代入式 (5) 后求解饱和土体的波动方程，可得饱和土体中 P_1 波（压缩快波）、 P_2 波（压缩慢波）和 SV 波（剪切波）的波数 α_{s1} 、 α_{s2} 和 β 的计算公式为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{s1,2}^2 &= \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ \beta^2 &= \frac{C}{D} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} A &= (\lambda + 2\mu)M \\ B &= (\lambda_c + 2\mu)(m'\omega^2 + i\omega b) + \rho\omega^2 M - 2\rho_f\omega^2\alpha M \\ C &= -\rho_f^2\omega^4 + \rho\omega^2(m'\omega^2 + i\omega b) \\ D &= \mu(m'\omega^2 + i\omega b) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: ω 为入射波圆频率; i 为虚数单位。

土骨架中 P_1 波、 P_2 波和 SV 波的势函数分别表示为 φ_{s1} 、 φ_{s2} 和 ψ_s , 流体中 P_1 波、 P_2 波和 SV 波的势函数分别表示为 ϕ_{f1} 、 ϕ_{f2} 和 χ_f , 势函数间转换关系为

$$\phi_{f1} = \gamma_1 \varphi_{s1}; \phi_{f2} = \gamma_2 \varphi_{s2}; \chi_f = \gamma_s \psi_s \quad (9)$$

其中, 系数 γ_1 、 γ_2 和 γ_s 分别为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \frac{-(\lambda_c + 2\mu)\alpha_{s1,2}^2 + \rho\omega^2}{\alpha M \alpha_{s1,2}^2 - \rho_f \omega^2} \\ \gamma_s &= \frac{-\rho_f \omega^2}{m'\omega^2 + i\omega b} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2.2 群桩对 SV 波散射的理论分析

设入射 SV 波在“基础单元”中第 c 排管桩局部坐标系 $(x_{c,0}, y_{c,0})$ 下的势函数为

$$\psi_s^{(i)}(x_{c,0}, y_{c,0}) = \psi_0 \exp[i\beta_s(c-1)h \sin \theta_{SV}] \cdot \exp[i\beta_s(x_{c,0} \cos \theta_{SV} + y_{c,0} \sin \theta_{SV})] \quad (11)$$

式中: ψ_0 为入射平面 SV 波的振幅。

将式 (11) 在对应的极坐标系 $(r_{c,0}, \theta_{c,0})$ 下展开为 Fourier-Bessel 级数形式:

$$\psi_s^{(i)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) = \psi_0 \exp[i\beta_s(c-1)h \sin \theta_{SV}] \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(\beta_s r_0) \cos m(\theta_0 - \theta_{SV}) \quad (12)$$

式中: $J_m(x)$ 为第 1 类 Bessel 函数。

饱和土中由于管桩的存在, 产生包括 P_1 波、 P_2 波和 SV 波的散射波场, 利用周期排列特性, “基础单元”与第 j 号周期单元相同位置处的散射波场相位差为 $\exp(i\beta_s j b \cos \theta_{SV})$, 因此第 j 号周期单元中第 c 排桩体的散射波场表达式为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{s1,cj}^{(r)}(r_{c,j}, \theta_{c,j}) &= \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{SV}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(\alpha_{s1} r_{c,j}) (A_n^c \cos n\theta_{c,j} + B_n^c \sin n\theta_{c,j}) \\ \varphi_{s2,cj}^{(r)}(r_{c,j}, \theta_{c,j}) &= \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{SV}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(\alpha_{s2} r_{c,j}) (C_n^c \cos n\theta_{c,j} + D_n^c \sin n\theta_{c,j}) \\ \psi_{s,cj}^{(r)}(r_{c,j}, \theta_{c,j}) &= \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{SV}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(\beta_s r_{c,j}) (E_n^c \sin n\theta_{c,j} + F_n^c \cos n\theta_{c,j}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: A_n^c 、 B_n^c 、 C_n^c 、 D_n^c 、 E_n^c 和 F_n^c 为“基础单元”中第 c 排管桩在饱和土中的散射系数。

应用任意坐标系间的 Graf 加法定理^[18], 将饱和土中所有散射场均表示在“基础单元”桩体的坐标系下, 以实现所有散射波场的叠加:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{s1,cj}^{(r)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) &= \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{SV}) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n^c (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\alpha_{s1} r_{c,0}) \cdot \right. \\ &\quad \left. (F_1^+(e, \delta) \cos m\theta_{c,0} + F_2^-(e, \delta) \sin m\theta_{c,0}) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^c (-1)^n \cdot \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\alpha_{s1} r_{c,0}) (F_2^+(e, \delta) \cos m\theta_{c,0} + F_1^-(e, \delta) \sin m\theta_{c,0}) \right\} \\ \varphi_{s2,cj}^{(r)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) &= \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{SV}) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_n^c (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\alpha_{s2} r_{c,0}) \cdot \right. \\ &\quad \left. (F_1^+(e, \delta) \cos m\theta_{c,0} + F_2^-(e, \delta) \sin m\theta_{c,0}) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n^c (-1)^n \cdot \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\alpha_{s2} r_{c,0}) (F_2^+(e, \delta) \cos m\theta_{c,0} + F_1^-(e, \delta) \sin m\theta_{c,0}) \right\} \\ \psi_{s,cj}^{(r)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) &= \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{SV}) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} E_n^c (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\beta_s r_{c,0}) \cdot \right. \\ &\quad \left. (F_1^+(e, \delta) \cos m\theta_{c,0} + F_2^-(e, \delta) \sin m\theta_{c,0}) + \sum_{n=0}^{\infty} F_n^c (-1)^n \cdot \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\beta_s r_{c,0}) (F_2^+(e, \delta) \cos m\theta_{c,0} + F_1^-(e, \delta) \sin m\theta_{c,0}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: F_1^+ 、 F_1^- 为任意坐标系间 Graf 加法定理系数, 与文献[18]中式 6(a)和 6(b)的定义一致。

因此, 在饱和土中土体 (不含流体) 内的总波场在 $(r_{c,0}, \theta_{c,0})$ 坐标系下可表示为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{s1,c} &= \sum_{c=1}^c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_{s1,cj}^{(r)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) \\ \varphi_{s2,c} &= \sum_{c=1}^c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_{s2,cj}^{(r)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) \\ \psi_{s,c} &= \sum_{c=1}^c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{s,cj}^{(r)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) + \psi_s^{(i)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由式 (9) 关系可由土体内的波场得到流体内的波场, 则流体总波场在 $(r_{c,0}, \theta_{c,0})$ 坐标系下可表示为

$$\left. \begin{aligned} \phi_{f1,c} &= \sum_{c=1}^c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_{f1,cj}^{(r)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) \\ \phi_{f2,c} &= \sum_{c=1}^c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_{f2,cj}^{(r)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) \\ \chi_{f,c} &= \sum_{c=1}^c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_{f,cj}^{(r)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) + \chi_{f,c}^{(i)}(r_{c,0}, \theta_{c,0}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

“基础单元”的管桩内散射波场可表示为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_p(r_{c,0}, \theta_{c,0}) &= \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\alpha_p r_{c,0}) (G_m^c \cos m\theta_{c,0} + I_m^c \sin m\theta_{c,0}) + \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} N_m(\alpha_p r_{c,0}) (H_m^c \cos m\theta_{c,0} + J_m^c \sin m\theta_{c,0}) \\ \psi_p(r_{c,0}, \theta_{c,0}) &= \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\beta_p r_{c,0}) (K_m^c \sin m\theta_{c,0} + M_m^c \cos m\theta_{c,0}) + \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} N_m(\beta_p r_{c,0}) (L_m^c \sin m\theta_{c,0} + N_m^c \cos m\theta_{c,0}) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中: G_m^c 、 H_m^c 、 I_m^c 、 J_m^c 、 K_m^c 、 L_m^c 、 M_m^c 和 N_m^c 均为桩体域中的散射系数; α_2 和 β_2 分别为管桩内的 P 波和 SV 波波数; $N_m(x)$ 表示第 2 类 Bessel 函数。

假定桩与饱和土界面处 ($r_{c,j} = a$) 不透水, 则边界条件为应力位移连续和孔隙水相对位移为 0:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rrs} &= \sigma_{rrp} \\ \sigma_{r\theta s} &= \sigma_{r\theta p} \\ u_{rs} &= u_{rp} \\ u_{\theta s} &= u_{\theta p} \\ w_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中: σ_{rrs} 和 $\sigma_{r\theta s}$ 分别为土体的径向与切向应力; σ_{rrp} 和 $\sigma_{r\theta p}$ 分别为桩体的径向与切向应力; u_{rs} 和 $u_{\theta s}$ 分别为土体的径向与切向位移; u_{rp} 和 $u_{\theta p}$ 分别为桩体的径向与切向位移; w_r 为流体径向位移。

将饱和土体中总波场 (式 (15)、(16)) 与管桩内散射波场 (式 (17)) 代入边界条件 (式 (18)) 内, 可得到一组用于求解散射系数的无穷线性方程组, 其详细表示已列入附录 A 中见式 (A1) 和 (A2)。

求解该方程组后可得到所有散射系数, 从而求得饱和土中所有管桩的散射波场, 再叠加入射波场后可得饱和土中的总波场。

3 方法验证

为表示和计算方便, 对相关参数进行无量纲化, 如下所示:

$$\left. \begin{aligned} \rho_f^* &= \frac{\rho_f}{\rho}, \quad m^* = \frac{m'}{\rho}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\mu}, \quad M^* = \frac{M}{\mu} \\ b^* &= \frac{\eta a}{k\sqrt{\rho\mu}}, \quad \zeta = \frac{\omega a}{c_s \pi}, \quad \rho_p^* = \frac{\rho_p}{\rho}, \quad E_p^* = \frac{E_p}{E_s} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中: c_s 为土中的剪切波速; E_p 和 E_s 分别为桩体和土体的弹性模量。

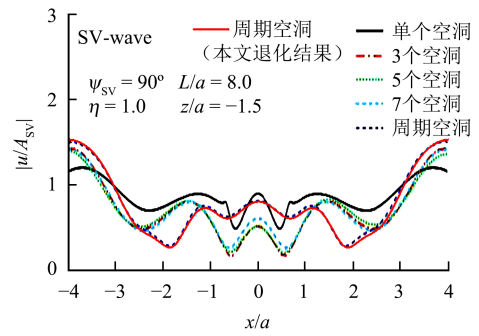
本文算例中均采用位移幅值比 $|u/u_0|$ 衡量 SV 波

入射下管桩的隔振能力, 其中 u 为管桩群后入射波场与相应散射波场的总位移, u_0 为未设立管桩群后仅存在入射波场时引起的位移。

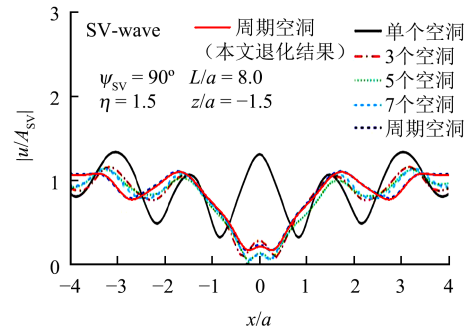
本节从退化弹性无限周期结果和对比饱和有限周期结果两个方面来验证本文结果的正确性。

3.1 与弹性无限周期结果对比

文献[21]采用周期间接边界元法给出了弹性介质中周期空洞对平面 SV 波散射的数值结果, 为与该结果对比, 取饱和参数 ρ_f^* 、 m^* 、 M^* 、 b^* 和 α 为 0, 则两相的饱和土模型退化为单相的弹性土模型, 取管桩的内径和外径相等 (即 $a_2 = a$), 则管桩退化为空洞, 按文献[21]的参数取值计算, 并与文献[21]中的图 7(a) 和 7(b) 进行对比, 对比结果如图 2 所示。图中, ψ_{sv} 为入射波角度, L 为桩间距。由图能够看出退化为弹性土中一排周期空洞的结果符合较好。



(a) 1.0 频率下的对比



(b) 1.5 频率下的对比

图2 退化弹性空洞与文献[20]对比

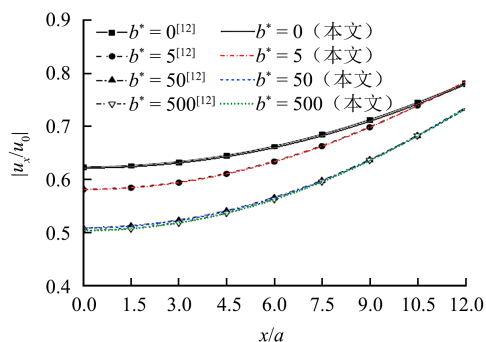
Fig.2 Comparison of degenerated elastic cavity with reference [20]

3.2 与饱和有限周期结果对比

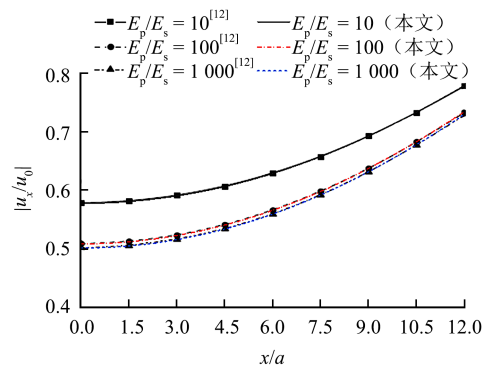
本节通过与文献[12]中的饱和有限周期结果进行对比, 分两步对本文理论的正确性验证: 第1步借助文献[12]中的饱和有限周期结果验证采用有限周期模型所得计算结果的正确性; 在饱和有限周期模型所得计算结果的正确性得到验证的前提下, 第

2 步计算桩数增加时饱和有限周期的结果, 分析结果的收敛情况。

文献[12]给出了饱和土中单排实心桩的结果, 按照文献[12]的参数取值并与文献[12]中图 5 和图 8 对比, 对比结果如图 3 所示, 由图 3 能够看出结果符合较好。



(a) 不同 b^* 下的对比



(b) 不同 E_p/E_s 下的对比

图 3 饱和土中有限周期模型结果与文献[12]结果对比
Fig.3 Comparison of results of finite period model in saturated soil with those in reference [12]

因此采用饱和有限周期模型所得计算结果的正确性可得验证, 之后增加桩数 N 计算并绘制管桩群中心处 $y/a = 1$ 至 $y/a = 500$ 的位移变化曲线, 同时采用饱和无限周期模型计算位移变化曲线, 结果均在图 4 中表示。

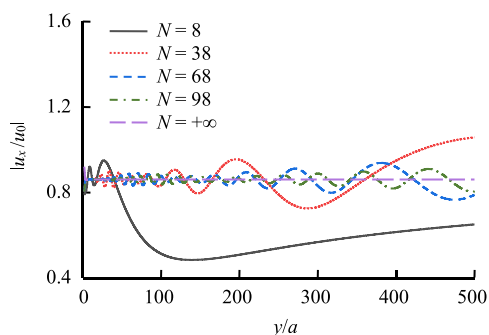


图 4 饱和土中有限周期模型与无限周期模型对比
Fig.4 Comparison between finite period model and infinite period model in saturated soil

从图 4 可以看出, 随着桩数 N 由 8 增至 38、68 和 98, 位移变化曲线逐渐与饱和无限周期的位移曲线趋于一致, 符合随 N 增加有限模型收敛于无限模型的规律, 这在饱和有限周期模型所得计算结果正确性得到验证的前提下, 能够间接证明本文饱和无限周期模型所得结果的正确性。

4 隔振效果分析

本节计算了饱和周期排列管桩后的位移随频率变化的频谱图, 首先与常规的饱和有限周期排列管桩模型结果进行对比, 之后讨论了饱和参数 b^* 、管壁厚度 a_2/a 、桩排数和群桩排列方式不同对隔振能力的影响。

饱和土体的 Biot 参数按文献[22]取值, 具体取值如表 1 所示。

表 1 算例中应用的参数

Table 1 Parameters used in the calculation

α	λ^*	M^*	ρ_f^*	m^*	b^*	ρ_p^*	ν_p	E_p^*
1.0	1.004	246.78	0.45	1.68	0~500	1.3	0.2	500

表 1 中各参数与式 (19) 的定义一致, SV 波为垂直入射, 即 $\theta_{SV} = 90^\circ$ 。位移输出点的横纵坐标在模型的整体坐标系 (x, y) 中分别用 x/a 和 y/a 表示, 特别说明的是, 图 5~11 中的“ y ”均按照周期排列管桩的最后一排计算, 即均为 $y-(p-1)h$ 。

4.1 桩体个数的影响

首先取单排空心管桩 (即 $a_2/a = 0.6$), 桩间距为 $s/a = 3.0$, 桩体个数分别为 $N = 9$ 、29、49 和 $+\infty$, 绘制群桩后点 $(0, 20)$ 处位移幅值比 $|u/u_0|$ 随无量纲频率 ζ 变化的频谱图, 如图 5 所示。

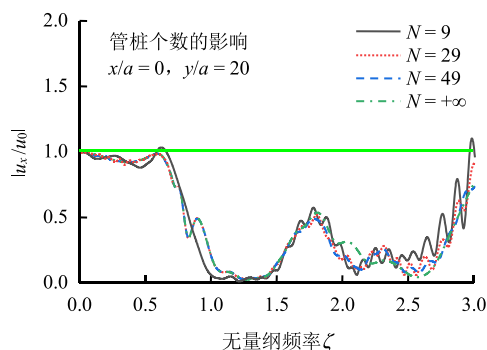


图 5 不同桩数 N 对管桩屏障隔振效果的影响
Fig.5 Effect of different number of piles N on vibration isolation of pipe pile barrier

从图 5 可以看出, 随着 N 的增加饱和有限管桩的频谱图收敛于饱和无限管桩的频谱图, 当桩数 N

增加到一定程度时(如图中 $N=49$), 两种计算模型的频谱结果已几乎一致, 可预见的是随着 N 的增加两者的差别将继续缩小。

此外饱和和有限周期模型与饱和无限周期模型的计算量有显著的不同, 计算量可用待定系数的个数衡量, 表 2 进行了两种不同模型的计算量对比, 并列出了计算时间, 计算机配置为: CPU 为 “Intel(R) Core(TM) i7-6700@3.40GHz 4 core”; 内存为 8 GB。

表 2 两种模型计算量的比较

Table 2 Comparison of calculation amount between two models

桩数 N	待定系数个数	计算时间/min
9	$126(m+1)$	92
29	$406(m+1)$	563
49	$686(m+1)$	1 597
$+\infty$	$14(m+1)$	33

注: m 为级数截断项数。

从表 2 和图 5 中可以看出, 若采用饱和有限周期模型计算桩数 $N=49$ 的结果, 频谱图与无限周期模型已几乎相同, 但待定系数个数为无限周期模型的 49 倍, 计算量远远大于无限周期模型, 若继续增加桩数 N 求解难度也会成倍增加。因此, 在涉及大量桩体计算时, 采用常规的有限周期模型具有较大的局限性甚至无法计算, 而随着桩数 N 的增加饱和有限的频谱结果迅速收敛于饱和无限的频谱结果, 此时饱和无限周期模型更适用于桩数多时的排桩频率分析, 求解精确且计算效率高。

4.2 饱和参数 b^* 的影响

为研究反映饱和土黏性耦合的参数 b^* 对隔振能力的影响, 取单排空管桩 (即 $a_2/a = 0.6$), 桩间距为 $s/a = 3.0$, b^* 分别为 0、10、100 和 500, 绘制桩体后点 (0, 20)、(0, 50) 和 (0, 100) 处在 SV 入射下的位移幅值比 $|u_x/u_0|$ 随无量纲频率 ζ 变化的频谱图, 同时绘制弹性结果的频谱图, 如图 6 所示。

从图 6 能够看出, 整体上随着饱和参数 b^* 增大管桩的隔振能力增强, 为进一步确定饱和参数 b^* 对隔振能力的影响, 分别取无量纲频率 ζ 为 0.5、1.5 和 2.5 时的频率点, 绘制点 (0, 20) 处位移幅值比 $|u_x/u_0|$ 随 b^* 变化的曲线, 如图 7 所示。

结合图 6 和图 7 可知: 整体上弹性结果与饱和结果的有较大差异, 而具体来看弹性结果和 $b^*=0$ 时的饱和结果比较接近, 说明饱和土的渗透性越强管桩的隔振能力越接近在弹性土中; 随着 b^* 的增大, 即饱和土的渗透性越差, 整体上隔振能力越强; 在 $\zeta=0.5$ 的较低频率时, 隔振效果随饱和参数 b^* 的变

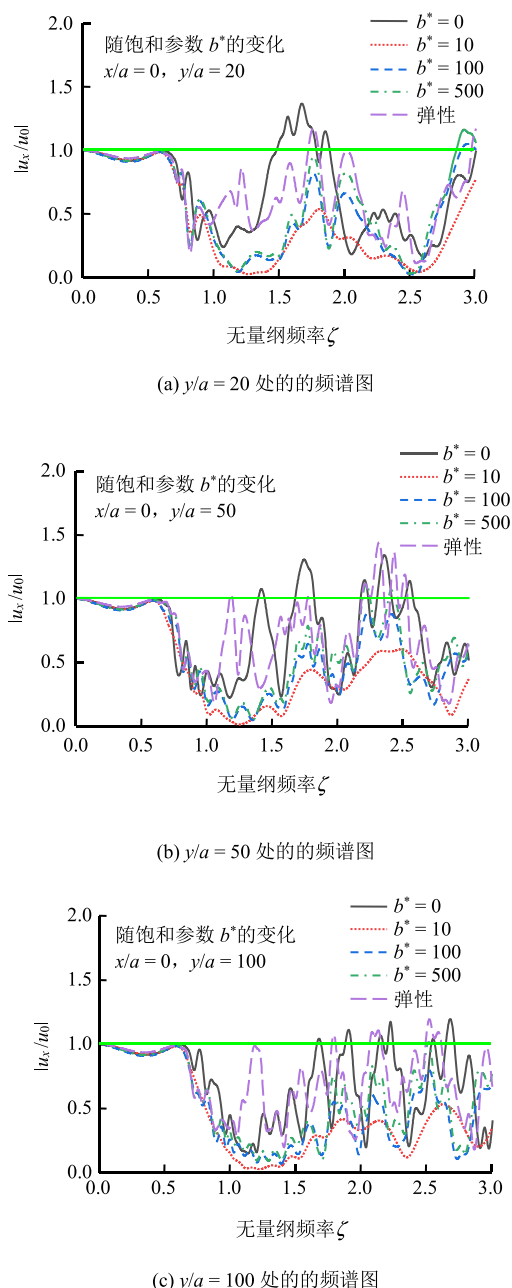


图 6 不同饱和参数 b^* 对排桩隔振效果的影响
Fig.6 Effect of different saturation parameters b^* on vibration isolation of row piles

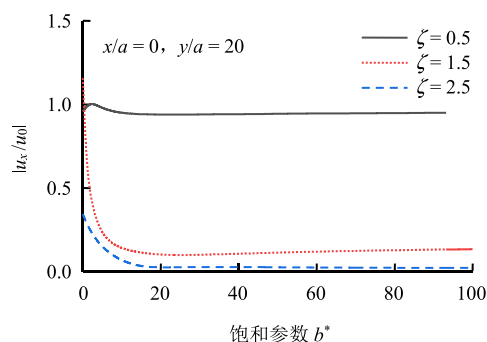


图 7 位移幅值比随饱和参数 b^* 变化曲线
Fig.7 Variation curves of displacement amplitude ratio with saturation parameter b^*

化不大,而在 $\zeta=1.5$ 和 2.5 的中高频率时,随着 b^* 的增大管桩的隔振能力有较为明显的提升, $b^*=10$ 左右时已具有较好的隔振效果,因此本文其他算例中也均取 $b^*=10$ 进行计算和分析。

4.3 管壁厚度的影响

为探究管壁厚度对管桩隔振能力的影响,取单排空心管桩,桩间距为 $s/a=3.0$,内外半径之比 a_2/a 分别为 0 、 0.3 、 0.6 和 0.9 ,绘制桩体后点 $(0, 20)$ 、 $(0, 50)$ 和 $(0, 100)$ 处在 SV 入射下的位移幅值比 $|u/u_0|$ 随无量纲频率 ζ 变化的频谱图,如图 8 所示。

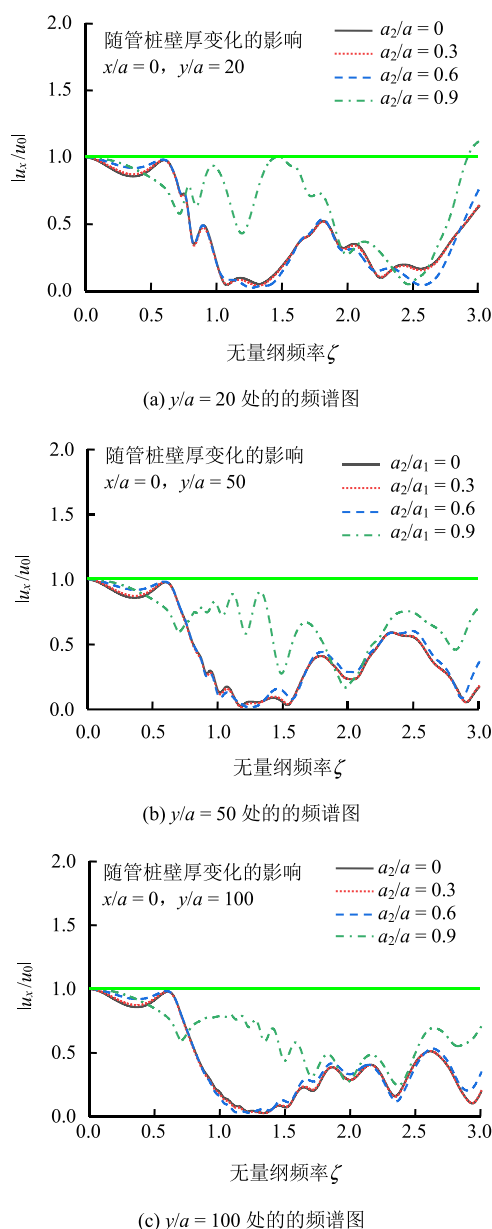


图 8 不同管壁厚度对排桩隔振效果的影响

Fig.8 Effect of different wall thicknesses on vibration isolation of row piles

从图 8 能够看出,整体上再管壁厚度较大时隔振效果随管壁厚度变化不大,而当管壁厚度较小时

差异明显且隔振能力变差,因此为进一步确定管壁厚度对隔振能力的影响,分别取无量纲频率 ζ 为 0.5 、 1.5 和 2.5 时的频率点,绘制位移幅值比 $|u/u_0|$ 随管壁厚度变化的曲线,结果如图 9 所示。

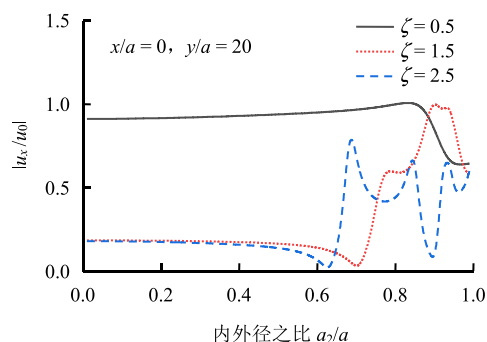


图 9 位移幅值比随管壁厚度变化曲线

Fig.9 Variation curves of displacement amplitude ratio with pipe wall thickness

结合图 8 和图 9 可知,不同频率入射波下饱和土中管桩的隔振能力不同:当管壁厚度较厚时隔振能力随管壁厚度的变化较为稳定,而当管壁厚度较薄时隔振能力随管壁厚度的变化起伏较大;当管壁厚度较薄时,在 $\zeta=0.5$ 的较低频率下,隔振能力随管壁厚度的增加而增强,在 $\zeta=1.5$ 、 2.5 的中高频率下,隔振能力随管壁厚度的增加有不同程度地降低;整体上当管壁厚度为 $a_2/a=0.6$ 左右时在大部分频段有稳定较好的隔振能力,因此本文其他算例中也均取 $a_2/a=0.6$ 进行计算和分析。

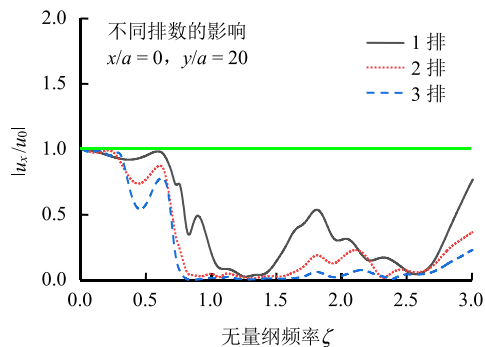
4.4 桩排数的影响

为探究桩排数对隔振能力的影响,取列间距和排间距分别为 $s/a=3.0$ 和 $h/a=3.0$,内外半径之比 $a_2/a=0.6$,桩排数分别取为 1 排、2 排和 3 排,绘制桩体后点 $(0, 20)$ 、 $(0, 50)$ 和 $(0, 100)$ 处在 SV 入射下的位移幅值比 $|u/u_0|$ 随无量纲频率 ζ 变化的频谱图,结果如图 10 所示。

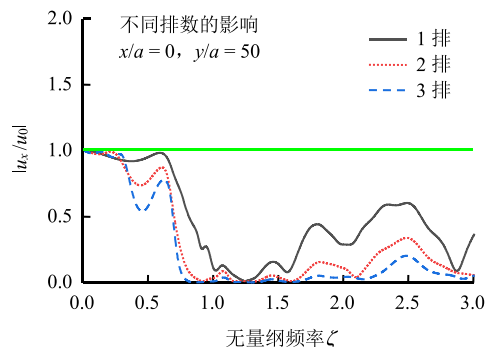
从图 10 可以看出,当桩排数增加时周期排列管桩的隔振能力整体提升显著,但在不同频段表现有所不同:在 $\zeta=0\sim0.6$ 的较低频段,管桩的隔振能力最弱,但随着排数的增加隔振能力有明显提高,每增加一排桩提高幅度为 20% 左右;在 $\zeta=0.6\sim1.5$ 的中频段,随着入射波频率的提高隔离能力迅速提高,单排、2 排和 3 排桩均对入射平面 SV 波有显著的屏蔽作用,随着排数的增加屏蔽区域的宽度更大;在 $\zeta=1.5\sim3.0$ 的较高频段,排数的增加对隔振效果的提升作用明显,每增加一排桩提高幅度可达 60%,值得提出的是饱和土中 3 排周期排列管桩能

够屏蔽大多数频率下的入射波。

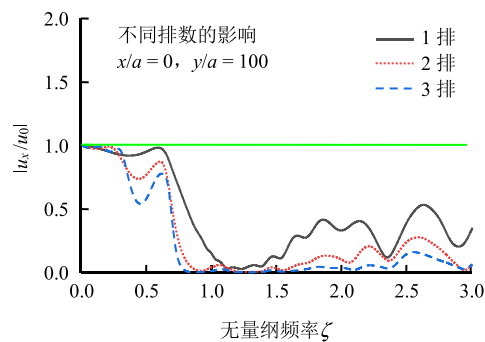
因此在饱和土中采用管桩进行隔振时更宜采用矩形排列。



(a) $y/a = 20$ 处的频谱图



(b) $y/a = 50$ 处的频谱图



(c) $y/a = 100$ 处的频谱图

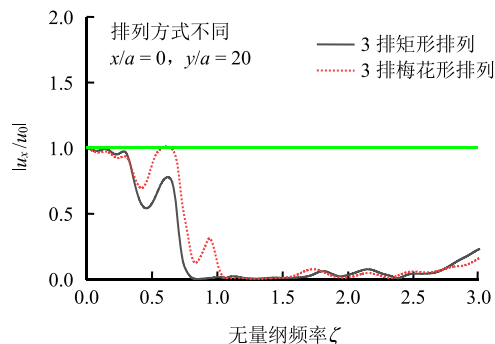
图 10 不同桩排数对管桩隔振效果的影响

Fig.10 Effect of different numbers of pile rows on vibration isolation of pile piles

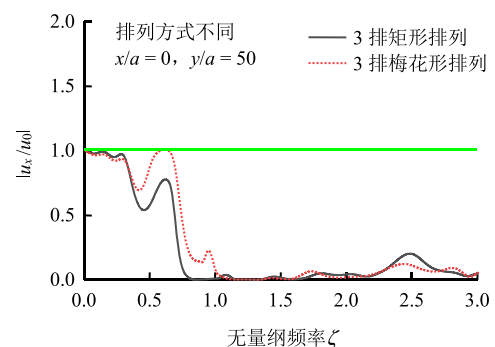
4.5 排列方式的影响

为探究排列方式对管桩隔振能力的影响, 取列间距和排间距分别为 $s/a = 3.0$ 和 $h/a = 3.0$, 内外半径之比 $a_2/a = 0.6$, 桩排数为 3 排, 绘制桩体后点 $(0, 20)$ 、 $(0, 50)$ 和 $(0, 100)$ 处在 SV 入射下的位移幅值比 $|u/u_0|$ 随无量纲频率 ζ 变化的频谱图, 结果如图 11 所示。

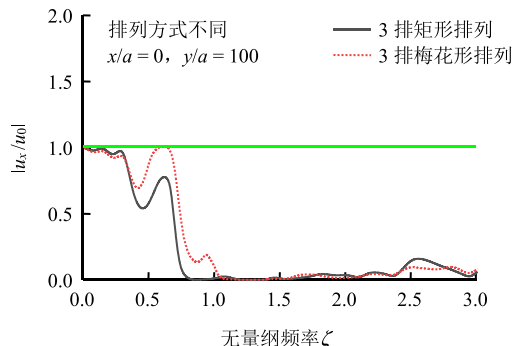
从图 11 可以看出, 在无量纲频率 $\zeta = 0 \sim 1.0$ 的较低频段, 饱和土中管桩矩形排列的隔振效果优于梅花形排列, 而当 $\zeta > 1.0$ 的频段矩形排列和梅花形排列的隔振能力基本一致, 均具有良好的隔振效果,



(a) $y/a = 20$ 处的频谱图



(b) $y/a = 50$ 处的频谱图



(c) $y/a = 100$ 处的频谱图

图 11 不同排列方式对管桩隔振效果的影响

Fig.11 Effect of different arrangement on vibration isolation of pile piles

5 结论

(1) 该方法能够有效解决饱和土中有限周期排列管桩模型涉及大量桩体时的求解困难, 尤其适用于桩数多时的频率分析, 求解精确且计算效率高。

(2) 周期排列管桩在饱和土中的隔振能力整体上优于在弹性土中, 且饱和土渗透性对隔振能力的影响较为明显, 饱和土的渗透性越差管桩的隔振能力越强。

(3) 管壁厚度对周期排列管桩的隔振能力有显

著影响,管壁厚度不宜过薄,内外径之比为 0.6 左右,可在大多数频率下具有较为稳定的隔振效果。

(4) 饱和土中管桩排数增加对隔离能力的提高显著,但在不同频段的影响不同:在 $\zeta = 0 \sim 0.6$ 的较低频段增加桩排数管桩的隔振能力提高幅度为 20% 左右;在 $\zeta = 0.6 \sim 3.0$ 频段增加桩排数能够显著增加屏蔽入射波的能力,隔振能力随排数增加提高幅度可达 60%,采用 3 排管桩屏障即可屏蔽大多数频率下的入射 SV 波。

(5) 整体上 3 排矩形排列和梅花形排列管桩均具有较强的隔振能力,而矩形排列比梅花形排列的管桩在低频时有着更好的隔振能力,高频时隔振能力基本一致,因此饱和土中采用管桩隔振时更宜采用矩形排列。

参考文献

- [1] 毛昆明,陈国兴,庄海洋.高架轨道交通引起的地表振动参数化分析[J].岩土力学,2012,33(11):3400-3406.
MAO Kun-ming, CHEN Guo-xing, ZHUANG Hai-yang. Parametric analysis of ground surface vibration induced by elevated rail transit[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(11): 3400-3406.
- [2] 曹志刚,蔡袁强,徐长节.空沟对列车运行引起的地基振动隔振效果研究[J].岩土力学,2012,33(8):2373-2382.
CAO Zhi-gang, CAI Yuan-qiang, XU Chang-jie. Screening efficiency of open trenches to train-induced ground vibration[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(8): 2373-2382.
- [3] WOODS R D, BARNETT N E, SAGESSER R. Holography—a new tool for soil dynamics[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1974, 100(11): 1234-1247.
- [4] AVILÉS J, SÁNCHEZ-SESMA F J. Piles as barriers for elastic waves[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1983, 109(9): 1133-1146.
- [5] AVILÉS J, SÁNCHEZ-SESMA F J. Foundation isolation from vibrations using piles as barriers[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1988, 114(11): 1854-1870.
- [6] KATTIS S E, POLYZOS D, BESKOS D E. Modelling of piles wave barriers by effective trenches and their screening effectiveness[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 1999, 18(1): 1-10.
- [7] KATTIS S E, POLYZOS D, BESKOS D E. Vibration isolation by a row of piles using a 3-D frequency domain BEM[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 46(5): 713-728.
- [8] GAO G Y, LI Z Y, QIU C, et al. Three-dimensional analysis of rows of piles as passive barriers for ground vibration isolation[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2006, 26(11): 1015-1027.
- [9] 徐平,夏唐代,周新民.单排空心管桩屏障对平面 SV 波的隔离效果研究[J].岩土工程学报,2007,29(1):131-136.
XU Ping, XIA Tang-dai, ZHOU Xin-min. Study on effect of barrier of a row of hollow pipe piles on isolation of incident plane SV waves[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2007, 29(1): 131-136.
- [10] 刘中宪,王少杰.非连续群桩屏障对平面 P、SV 波的隔离效应:二维宽频带间接边界积分方程法模拟[J].岩土力学,2016,37(4):1195-1207.
LIU Zhong-xian, WANG Shao-jie. Isolation effect of discontinuous pile-group barriers on plane P and SV waves: simulation based on 2D broadband indirect boundary integration equation method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(4): 1195-1207.
- [11] 刘维宁,姜博龙,马蒙,等.周期性排桩设计频段隔振原理性试验研究[J].岩土力学,2019,40(11):4138-4148.
LIU Wei-ning, JIANG Bo-long, MA Meng, et al. Elementary experimental investigation of the periodic piles for vibration isolation of design frequency range[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(11): 4138-4148.
- [12] CAI Y Q, DING G Y, XU C J. Amplitude reduction of elastic waves by a row of piles in poroelastic soil[J]. **Computers and Geotechnics**, 2009, 36(3): 463-473.
- [13] 时刚,高广运.饱和土半解析边界元法及在双排桩被动隔振中的应用[J].岩土力学,2010,31(增刊2):59-64.
SHI Gang, GAO Guang-yun. Semi-analytical boundary element method in saturated soil and its application to analysis of double row of piles as passive barriers[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(Suppl.2): 59-64.
- [14] 徐平,夏唐代.饱和土体中空管桩屏障对 P_1 波的隔离[J].土木工程学报,2013,46(增刊2):152-157.
XU Ping, XIA Tang-dai. Analysis of isolation effects of P_1 waves by barriers composed of a row of hollow pipe piles in saturated soils[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2013, 46(Suppl.2): 152-157.
- [15] 李昌俊,刘中宪,孙帅杰,等.饱和土体中管桩屏障对平面 SV 波的隔离效应[J].应用力学学报,2019,36(4):

832-838, 996.

LI Chang-jun, LIU Zhong-xian, SUN Shuai-jie, et al. Isolation effects of SV waves by barriers composed of a row of hollow pipe piles in saturated soils[J]. **Chinese Journal of Applied Mechanics**, 2019, 36(4): 832-838, 996.

[16] 孙连勇, 时刚, 崔新壮, 等. 饱和地基中单排孔近场隔振的现场试验与数值分析[J]. 山东大学学报(工学版), 2020, 50(3): 88-97.

SUN Lian-yong, SHI Gang, CUI Xin-zhuang, et al. Field test and analysis of vibration isolation of machine foundation by a row of holes in saturated soil[J]. **Journal of Shandong University (Engineering Science)**, 2020, 50(3): 88-97.

[17] MENG L, CHENG Z, SHI Z, et al. Vibration mitigation in saturated soil by periodic pile barriers[J]. **Computers and Geotechnics**, 2020.

[18] 巴振宁, 刘世朋, 吴孟桃, 等. 周期分布群桩屏障对平面弹性波隔振效应的解析求解[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, 39(7): 1468-1482.

BA Zhen-ning, LIU Shi-peng, WU Meng-tao, et al. Analytical solution for isolation effect of periodically distributed pile-group barriers on plane elastic wave[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2020, 39(7): 1468-1482.

[19] 巴振宁, 刘世朋, 吴孟桃, 等. 周期分布桩体对平面 SH 波隔振效应的解析求解[J]. 岩土力学, 2020, 41(9): 2861-2868.

BA Zhen-ning, LIU Shi-peng, WU Meng-tao, et al. Analytical solution for isolation effect of plane SH waves by periodically distributed piles[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2020, 41(9): 2861-2868.

[20] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I: low frequency range[J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 1956, 28(2): 168-178.

[21] 巴振宁, 高旭, 梁建文. 周期分布不规则体对弹性波的二维散射[J]. 振动与冲击, 2020, 39(14): 201-213.

BA Zhen-ning, GAO Xu, LIANG Jian-wen. Two-dimensional scattering of elastic waves by periodic distribution irregularities in an elastic full space[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2020, 39(14): 201-213.

[22] STOLL R D, KAN T K. Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface[J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 1981, 70(1): 149-156.

附录 A

在管桩对入射平面 SV 波散射的理论推导过程中, 以其中一组为例, 其余组可按文中公式同样推出, 则关于散射待定系数的无穷线性方程组为

$$\begin{aligned} & A_m^c \Gamma_{11}^{(3)} + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{11}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_1^+ A_n^c + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{11}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_2^+ B_n^c + \\ & C_m^c \Gamma_{12}^{(3)} + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{12}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_1^+ C_n^c + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{12}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_2^+ D_n^c + \\ & E_m^c \Gamma_{13}^{(3)} + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{13}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_1^- E_n^c + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{13}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_2^- F_n^c - \\ & \frac{\mu_2}{\mu_1} G_m^c \epsilon_{11}^{(1)} - \frac{\mu_2}{\mu_1} H_m^c \epsilon_{11}^{(2)} - \frac{\mu_2}{\mu_1} K_m^c \epsilon_{12}^{(1)} - \frac{\mu_2}{\mu_1} L_m^c \epsilon_{12}^{(2)} = -\exp[i\beta_s (c-1) h \sin \theta_{sv}] \epsilon_m i^m \Gamma_{13}^{(1)} \sin m \theta_{sv} \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} & B_m^c \Gamma_{11}^{(3)} + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{11}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_2^- A_n^c + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{11}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_1^- B_n^c + \\ & D_m^c \Gamma_{12}^{(3)} + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{12}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_2^- C_n^c + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{12}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_1^- D_n^c + \\ & F_m^c \Gamma_{13}^{(3)} + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{13}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_2^+ E_n^c + \sum_{c=0}^c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_s j b \cos \theta_{sv}) \Gamma_{13}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_1^+ F_n^c - \\ & \frac{\mu_2}{\mu_1} I_m^c \epsilon_{11}^{(1)} - \frac{\mu_2}{\mu_1} J_m^c \epsilon_{11}^{(2)} - \frac{\mu_2}{\mu_1} M_m^c \epsilon_{12}^{(1)} - \frac{\mu_2}{\mu_1} N_m^c \epsilon_{12}^{(2)} = -\exp[i\beta_s (c-1) h \sin \theta_{sv}] \epsilon_m i^m \Gamma_{13}^{(1)} \cos m \theta_{sv} \\ & (m=0,1,2,\dots,+\infty; c=1,2,\dots,p) \end{aligned} \quad (A2)$$